

XXXIV. *De Problemate quodam Algebraico, deque evolutione mechanicæ cujusdam Curvæ inter infinitas hypermechanicas, quæ determinatæ æquationi satisfaciunt. Auctore Pio Fantoni, Mathematico Bononienfi. Communicated by Sir Horace Mann, His Majesty's Envoy at Florence.*

Read June 25, 1767. **Q**UI in computationibus analyticis versari solet, animum non modo in ea præsidia solet intendere, quibus problemata deducuntur ad æquationes, sed maximam ubique exoptat concinnitatem, atque elegantiam, ut universi operis apparatus, constructio, utilitasque commendentur. Quantum vero elaborationis, ac studii plerumque ad hæc singula requiratur, ii probe intelligunt excellentissimi viri, qui se jamdudum algebræ dediderunt. Veruntamen fateri ultro debent, non mediocrem aliquando utilitatem obtineri posse ex hujusce potius, quam illius methodi applicatione. Fit enim non raro, ut cum quæstionem aliquam subtili licet ingenio versatus fueris, alia tandem methodus meliori auspicio suscepta, illico tibi elargiatur clariorem uberioremque ejusdem quæstionis solutionem, ex qua multa præterea obtineas quæ admireris. Id vero mihi

in sublimi problemate quodam algebraico, an bene feliciterque contigerit, vestro iudicio, Academici sapientissimi, quod maximi facio, decernendum relinquo. Si interea, ut exoro, hanc meam elucubrationem summa humanitate vestra excipietis, eâ deinceps utar in aliis non contemnendis rebus tum physicis, tum mechanicis, ut vestra sapientia duce, facilius ad quasdam naturæ adhuc reconditas leges pervenire possim.

Nunc porro velim intelligatis, me in hoc argumento analytico, de quo loquor, tria maxime præstitisse. Primum enim curvam quandam exploravimus suis coordinatis ad axem, & licet lectissimis præfidiis usi fuerimus in separatione indeterminatarum, licet investigationem nostram satis ultro promotam conspexerimus, in æquationem tandem, ut dicunt, hypermechanicam irrumpere opus fuit, in eam videlicet, quæ exposcit mechanicam quadraturam curvarum exigentium primo mechanicam circuli quadraturam. Ex hac autem fere inextricabili constructione non ea certe consecraria, quæ in votis erant, erui elegantissime potuissent. Quare difficultate rei veluti commoti, satis opportune curvam nostram ab axe ad focus deduximus, atque hoc modo universum illud opus, cujus dilucide enodandi spem omnem antea demisimus, eò tandem feliciter perduximus, ut ipsum recte esset, nobisque plene satisfaceret. At vero in hac secunda problematis mei parte dum contendendo, dum illam constanti animo defugio hypermechanicam constructionem, atque ad pure mechanicam propero, invenio tandem in infinita curvarum hypermechanicarum familia, quæ peculiari
cuidam

cuidam æquationi satisfaciunt, unam præterea curvam opportune abscondi, quæ a simplici quadratura circuli dependeat, quæque nobis constructionem plenam aptioremque impertiat, sitque semper in potestate, dummodo y dentur per x , quanquam separari indeterminatæ nullo pacto ab invicem possint. Qui rem hanc altius perscrutari curabunt, non difficili labore intelligent in æquationibus naturæ hujus semper includi curvam similem nostræ simili modo detegendam. Cujus sane methodi cognitio an utilitati & commodo Analystis futura sit in hujusmodi operosissimis quæstionibus solvendis, non est cur diuturniori oratione vobis exponam. Properamus itaque ad rem nostram.

P R O B L E M A.

T A B. XIV. FIGURA PRIMA.

Invenire curvam IMm ea proprietate donatam, ut ex dato puncto A ductâ in tangentem MT perpendiculari AG , intercepta MG sit semper æqualis constanti a .

Ex puncto contactus M in axem AP duc perpendicularem MP , eique parallelam infinite proximam mp , tum excita ex puncto M rectam Ms parallelam Pp , dicque $AP = x$, $Pp = Ms = dx$, $PM = y$, $ms = dy$, & $MG = a$. Erit $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. $PT = \frac{ydx}{dy}$. $TA = \frac{ydx - xdy}{dy}$, $TM = \frac{y}{dy} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, ideoque $GT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} - a$.

Fig. 1.

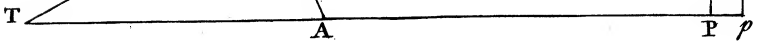


Fig. 2

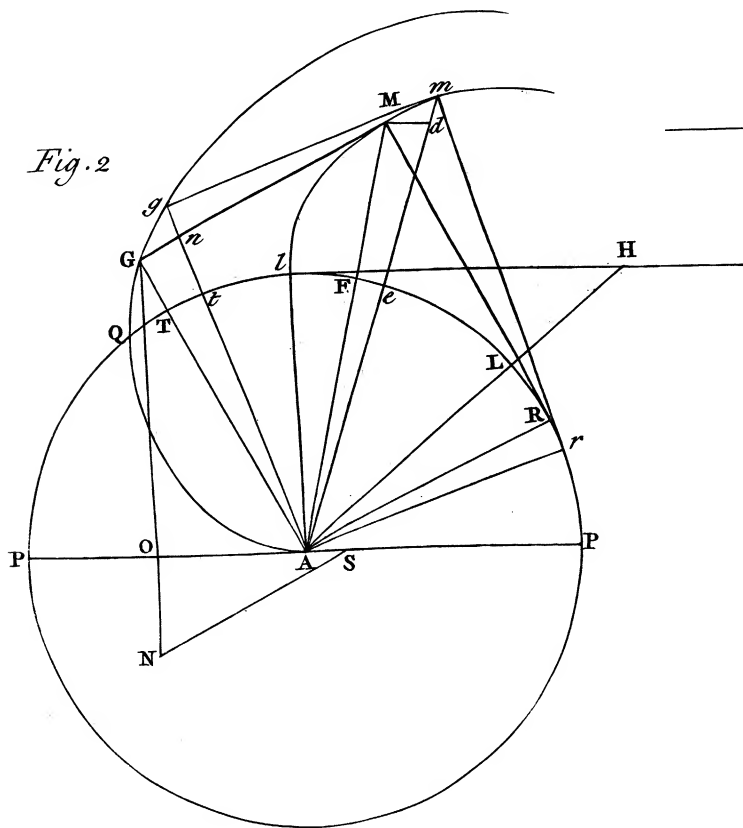
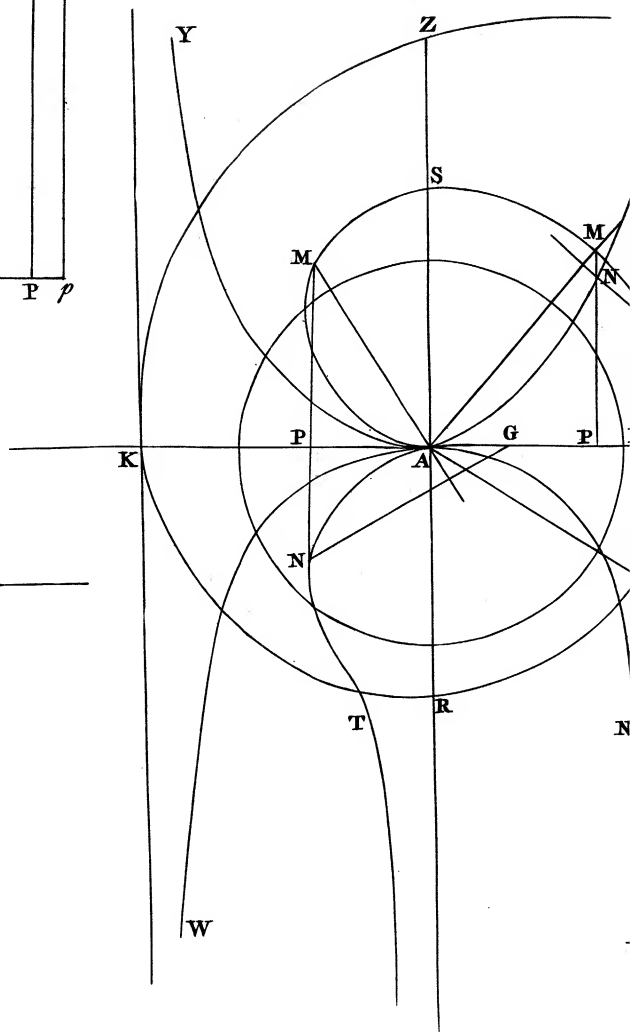
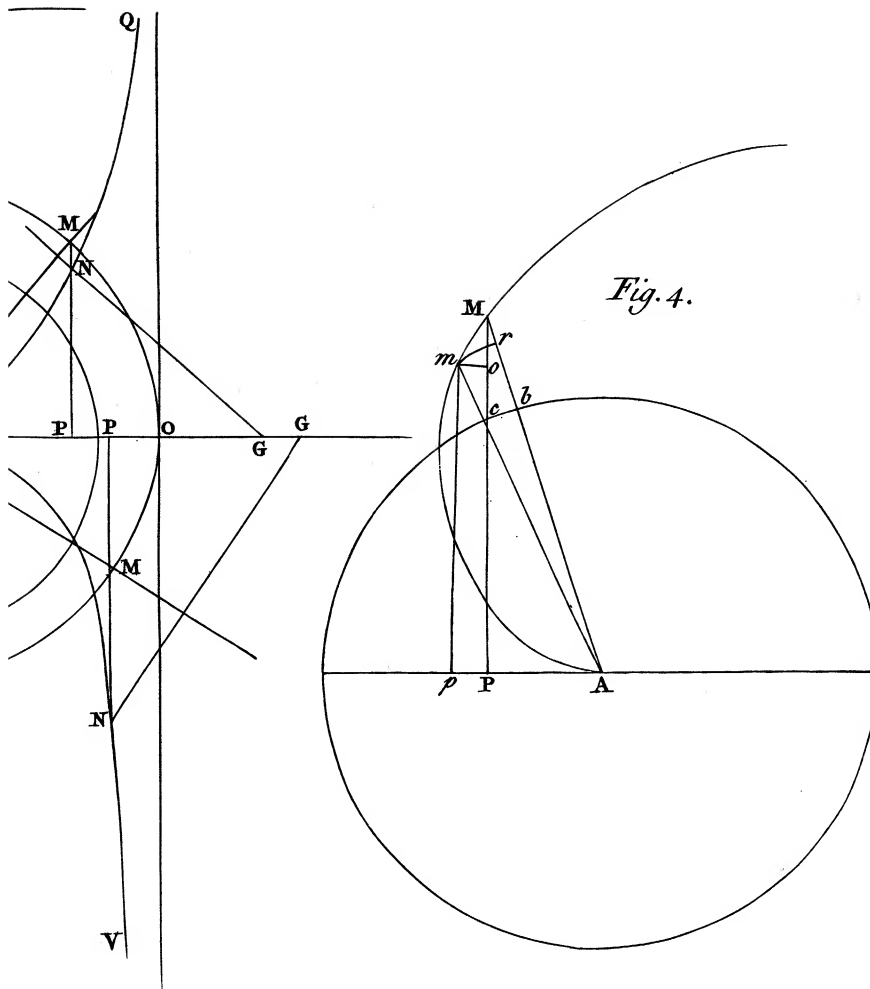


Fig. 3.





At propter familia triangula Msm , TGA , erit
 $Mm : Ms :: TA : TG$. feu $\sqrt{dx^2 + dy^2} : dx :: \frac{ydx - xdy}{dy}$:
 $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} - a$; unde facta extremorum mediorum-
 que multiplicatione, erit $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = ydy + xdx$, feu
 $x = -\frac{ydy}{dx} + \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

Fac autem pro separatione indeterminatarum $x =$
 $\int \frac{tdy}{a}$, & consequenter $dx = \frac{tdy}{a}$, tumque hos valores
 pro x , & dx substitue in data æquatione. Habebis
 $\int \frac{tdy}{a} = -\frac{ay}{t} + \frac{a\sqrt{t^2 + a^2}}{t}$, & facta differentiatione, erit
 $\frac{tdy}{a} + \frac{ady}{t} - \frac{aydt}{tt} = \frac{-a^3dt}{t^2.a^2 + t^2.\frac{1}{2}}$ feu $\frac{dy}{y} - \frac{a^2dt}{t.a^2 + t^2} = \frac{-a^4dt}{ty.a^2 + t^2.\frac{3}{2}}$.

Cum porro ex nota Bernoulii methodo fit $\frac{a^2dt}{t.a^2 + t^2}$
 $= \frac{dt}{t} - \frac{tdt}{t^2 + a^2}$, pone claritatis gratia hæc logarith-
 micas quantitates $= \frac{dn}{n}$. Hinc habebis $\frac{dy}{y} - \frac{dn}{n} =$
 $\frac{-a^4dt}{ty.a^2 + t^2.\frac{3}{2}}$. Positis autem $\frac{dy}{y} - \frac{dn}{n} = \frac{dp}{p}$, atque ideo $\frac{y}{n} =$
 $\frac{p}{a}$, feu $y = \frac{np}{a}$, & facta harum quantitatum substituti-
 one, obtinebis $\frac{dp}{p} = \frac{-a^5dt}{npt.a^2 + t^2.\frac{3}{2}}$, feu $dp = \frac{-a^4dt}{t^2 \times t^2 + a^2}$;
 posito videlicet jam primum $n = \frac{at}{\sqrt{t^2 + a^2}}$ ex quo se-
 quitur $dp = \frac{a^2dt}{t^2} + \frac{a^2dt}{a^2 + t^2}$.

Sed quia constituimus superius $x = \int \frac{tdy}{a}$, & $y = \frac{np}{a}$; si in hisce valoribus coordinatarum x & y substituas æquivalentes valores expressos dumtaxat per t , & dt , habebis demum

$$x = \int \frac{\overline{at dt}}{t^2 + a^2 \frac{1}{2}} \times \int \frac{\overline{a^2 dt}}{t^2 + a^2}$$

$$\& y = \frac{t}{a^2 + t^2 \frac{1}{2}} \times \frac{a^2}{t} + \int \frac{\overline{a^2 dt}}{t^2 + a^2}.$$

Qui vero hujusmodi formulas ad constructionem revocare statuerit, intelliget ille quidem infinitis dumtaxat curvis problema nostrum plane exhaustiri

posse. * At quis non dixerit $\int \frac{\overline{at dt}}{t^2 + a^2 \frac{1}{2}} \times \int \frac{\overline{a^2 dt}}{t^2 + a^2}$, exigere

constanti lege in quolibet casu quadraturam mechanicæ cujusdam curvæ, quæ ipsa primum a mechanica circuli quadratura dependeat? Primo certe hujusce formulæ adspectu nemo non judicaverit problema nostrum hypermechanicum fore; maxime vero cum nulla directa methodo, quantum mihi constat, compertum sit, hujusmodi formulas revocari posse ad alias, quæ a sola circuli quadratura dependeant. Quapropter in illa ego opinione adhuc essem, ut solæ hypermechanicæ curvæ aptæ forent satisfaciendo problemati nostro, si quæsitam curvam ab axe non traduxissem ad focum; ex quo illico certior factus sum, quæstiones hujusmodi,

* Fluens $\int \frac{\overline{at dt}}{t^2 + a^2 \frac{1}{2}} \times \int \frac{\overline{a^2 dt}}{t^2 + a^2}$ a sola circuli quadraturâ pendet & hæc est $\frac{at}{a^2 + t^2 \frac{1}{2}} - \frac{a}{a^2 + t^2 \frac{1}{2}} \times \int \frac{\overline{a^2 dt}}{a^2 + t^2}$ (arc circuli, cujus radius est a & tangent c .) E. W.

quas

quas ab initio dixeris implicatissimas, seu pene inextricabiles, sola tandem circuli quadratura expediri feliciter posse. Quo autem modo id factum a nobis fuerit brevi expono.

FIGURA SECUNDA.

Referatur * quæsitæ curva IMm ad focus A , ex quo ductis duabus ordinatis AM , Am minimum angulum continentibus, centro A , radio AM describatur infinitesimus arcus Md , tum vocetur $AM = z$, $Md = dx$, $Mm = ds$; ductaque tangente MG , atque in ipsam ex puncto A perpendiculari AG , fiat intercepta $MG = a$, unde perpendicularis AG erit $= \sqrt{z^2 - a^2}$.

Propter similia trianguia AMG , Mdm erit $Mm : md :: MA : MG$; seu $ds : dx :: z : a$. ergo $zdx = ads$. & integrando $Aa + as = \frac{z^2}{2}$. Constat itaque curvam quæsitam esse rectificabilem, estque A quantitas addenda, si opus fuerit, æquationi complendæ, quam A deinceps determinabimus.

Erigatur interea æquatio differentialis ad quadratum, & orietur $z^2 dz^2 = a^2 ds^2 = a^2 dx^2 + a^2 dx^2$, ob triangu- lum Mdm infinitesimum rectangulum in d . Hanc ergo habebis $\sqrt{z^2 - a^2} \cdot dx^2 = a^2 dx^2$; five $dz \sqrt{z^2 - a^2} = a dx$, quæ est æquatio quæsitæ curvæ relatæ hoc modo ad focus A .

Multiplicetur hæc ultima æquatio per $\frac{z}{2a}$; fiet $\frac{zdx}{2a} \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{zdx}{2}$. Integretur; habebis $aB +$

* Hujus curvæ arcum, longitudinem, evolutam & radium curvaturæ jamdudum invenit Simpson; consulas enim pagin. 151 & 163 in tractatu suo de fluxionibus. E. W.

$\frac{zx - aa\sqrt{zx - aa}}{2 \cdot 3 \cdot a} = \int \frac{zdx}{2}$. Cum autem $\frac{zdx}{2}$ sit elementum areæ, patens est curvam esse quadrabilem. B est quantitas addenda, si opus ea fuerit, in integratione.

Ut vero redigatur æquatio superius inventa ad arcum radii constantis, abscinde $AE = a$, & describe arcum minimum Ee , quem voca $= du$. Habebis $z : a :: dx : du$. ergo $dx = \frac{zdu}{a}$; quo valore substituto in superiori æquatione $dz\sqrt{z^2 - a^2} = a dx$, hæc mutabitur in istam $\frac{dz}{z}\sqrt{z^2 - a^2} = du$, in qua insunt variabiles separatæ.

Ut primum membrum ad formulas magis cognitæ reducat, ita æquationem dispono $\frac{zdz\sqrt{z^2 - a^2}}{zx} = du$; tum constituo $AG = \sqrt{z^2 - a^2} = t$, factaque substitutione, orietur $\frac{t^2 dt}{t^2 + a^2} = dt - \frac{a^2 dt}{t^2 + a^2} = du$. Formula $\frac{a^2 dt}{t^2 + a^2}$ ut constat, est elementum arcus circularis, cujus radius $= a$, tangens $= t$.

Ultima igitur hæc æquatio ad constructionem perducit, quæ circuli quadraturam supponit. Centro itaque A, radio $AI = a$, describatur circulus ILP, cui sit tangens indefinita IK. Sumatur in hac tangente quælibet $IH = t$, & agatur secans $AH = z$; sume præterea differentiam inter tangentem IH, & ejus arcum IL, quæ erit $= u$; tandem accipe arcum IL huic differentiæ æqualem, & per punctum E. duc $AM = AH$, punctum M erit in curva quæsita.

Ex hac constructione facile colligitur curvam nostram incipere in puncto I, tum ad modum spiralis semper recedere a circulo, & infinitis circumvolutionibus illum ambire. In puncto I curva tangitur a radio IA. Nullam addidi in mea constructione constantem, propterea quod constantis additio curvam non mutat. Nam IE vel fit æqualis u , vel $u+b$, vel tandem $u-b$, eadem prorsus curva enascitur.

Nunc vero sunt determinandæ constantes A. & B, quæ additæ sunt in integratione; dum curvæ rectificationem, & quadraturam invenimus. Quoniam posito $s=0$, fit $z=a$, æquatio $\frac{z^2}{2} - Aa = as$, data hac hypothefi, in istam mutabitur $\frac{aa}{2} - Aa = 0$, unde $A = \frac{a}{2}$; quapropter æquatio completa erit $\frac{zz-aa}{2a} = s$. Atqui $zz-aa = H$. ergo $\frac{H}{2a} = s$.

Quod spectat ad quadraturam, jam constat fore aream AIM = 0, cum fit $z = \text{radio}$, seu $= a$; ergo æquatio $aB + \frac{zz-aa\sqrt{zz-aa}}{2 \cdot 3 \cdot a} = \int \frac{zdx}{2}$, evadit in hac hypothefi in istam $aB = 0$: ergo æquatio completa est $\frac{zz-aa\sqrt{zz-aa}}{2 \cdot 3 \cdot a} = \frac{t^3}{2 \cdot 3 \cdot a} = \int \frac{zdx}{2}$. Sed $\frac{t^2}{2a} = s$; ergo $\frac{ts}{3} = \int \frac{zdx}{2}$; ideoque spatium IAM est tertia pars rectanguli ex AG, seu IH, & ex curva IM.

Radium osculi hac ratione definiemus. Ducatur radius AR perpendicularis rectæ AG, & jungatur RM. Quoniam GM, AR æquales sunt, & parallelæ, GA, MR pariter æquales erunt, & parallelæ. Ergo
MR.

MR perpendicularis radio AR tanget circulum, & perpendiculariter occurret curvæ Mm . Eodem prorsus modo ducto radio Ar normali rectæ Ag , linea mr erit tangens circuli, & normalis curvæ Mm . Igitur curva IMm ea est quæ nascitur ex evolutione circuli, & recta $MR = AG$ æquabit arcum circularem IR .

Quoniam vero $RM = AG = IH$, & IH ex constructione æquat duos arcus circulares IE , IL , arcus IR æquabit duos arcus IE , IL , & dempto communi IL , remanebit arcus $IE = LR$.

Infiniteſimus ſector RMm , qui eſt elementum areæ $REIM$ æqualis eſt $\frac{t ds}{2}$. Sed $ds = \frac{z dz}{a} = \frac{t dt}{a}$. ergo

$$RMm = \frac{t^2 dt}{2a}. \text{ Et integrando area } REIM = \frac{t^3}{2 \cdot 3 \cdot a}.$$

Sed etiam area IAM ſuprà inventa eſt æqualis $\frac{t^3}{2 \cdot 3 \cdot a}$,

ergo area $REIM = IAM$. Et ablato ſpatio communi IEM , remanet ſector $IAE = MER$. Addito autem ſectore EAR fit ſector $IAR =$ triangulo AMR , quod apprime cum veritate conſentit; nam cum arcus $IR = RM$, conſtat ſectorem IAR æquare triangulum ARM .

Curva tranſiens per omnia puncta G .g. erit baſis, ex qua gignitur tractoria IMm . Quænam ſit hæc curva breviter videamus. Quoniam GA_n , & MRm ſunt ſectores ſimiles, & $AG = RM$, erit $Gn = Mm = ds$. Ergo æquatio $ads = tdt$, erit æquatio curvæ quæſitæ, exiſtente ordinata $AG = t$, $Gn = ds$. Ut autem æquatio reducatur ad arcum radii conſtantis, vocetur $Tt = dw$; erit $t : a :: ds : dw$. Ergo $ads = t dw$.

Ergo

Ergo $tdt=tdw$, five $dw=dt$, five tandem $Tt=gn$, quæ est æquatio spiralis Archimedæ, cujus constructio ita peragitur.

Age radium AP, perpendicularem radio AI, & sumatur arcus PQ æqualis radio; tum polo A, describatur spiralis Archimæda transiens per punctum Q; hæc ipsa erit basis, ex qua describitur tractoria IM prædita tangente constanti $GM=a$.

Interea hæc habe: spiralis Archimæda est ea curva, a qua tamquam basi nostra generatur tractoria IMm. Nunc superest animadvertere, quod si in illa formula, quam vir clariss. Vincentius Riccatus methodo motus tractorii construxit in suo commentario de usu hujus motus in æquationum differentialium constructione (ubi hanc methodum illustravit penitusque absolvit) si, inquam, in illa formula supponas x & y esse coordinatas spiralis Archimedæ, & y datas esse per x , quamquam indeterminatæ separari omnino nequeant, suscipiet dicta formula ex infinitis, quarum est capax, unam quoque constructionem dependenter a nostra curva. Ea ex quatuor Riccatianis ibidem expositis formulis, quæ hypothefi nostræ convenit prima est, nimirum,

$$\frac{abdz}{\sqrt{bt+qq}} + qdx = bdy.$$

Facta ergo, ut dixi, suppositione, ejus x & y esse coordinatas spiralis Archimedæ, si infinita puncta N construendæ curvæ tuto invenire cupias, exigit illa methodus, ut descripta tractoria IMm ope filii, seu tangentis constantis $GM=a$, facto jam motu aG versus Q, tumque sumpta in axe quacumque constanti $OS=b$, semper ad eandem partem, si per punctum S. ducas

ducas parallelam tangenti GM, donec occurrat ordinatæ $OG=y$ in puncto N, hocce punctum, ut ibi demonstratur, est semper in quæsitâ curvâ. Atqui vidimus supra rectam RA parallelam tangenti GM hujus nostræ tractoriæ IMm fore perpendicularem radio AG spiralis Archimedæ AQG.

FIGURA TERTIA.

Ergo ut habeas infinita puncta N.N. construendæ curvæ, sufficit quod sumas semper in axe constantes PG, $PG=b$ ad eandem plagam, tumque a punctis G, G ducas in radios spiralis AM, AM productos, si oporteat, normales GN, GN, donec occurrant ordinatis PM, PM in N.N. Hoc modo obtinebis per infinita puncta curvam hac methodo describendam. Invenies itaque hujusmodi curvæ ramum genitum a spiralis arcu AMS esse ANT; ab altero vero spiralis arcu SMO esse ANQ; a tertio OMR esse ANV; a quarto RK esse AY; a quinto denique KZ esse AW, & sic in infinitum asymptoticos omnes; ex quo propterea vides integram curvam, quæ nostræ formulæ constructionem suppeditat in hac videlicet peculiari tractoria abdita ramis numero infinitis gaudere, ac eorum quemlibet votis satisfacere recte posse.

Sed quia ad obtinendam dictæ formulæ constructionem opus maxime est ut abscissæ x sint in axe, earum vero ordinatæ y sint omnes inter se parallelæ (nostræ autem y hic sunt ad focum) ac propterea oportet ut eædem y datæ sint per x , vel postea separari indeterminatæ possint, vel non, nunc ergo ut hisce conditionibus

onibus compleam, fatis mihi erit invenire æquationem spiralis Archimedææ relatæ ad axem, quod sic assequor.

FIGURA QUARTA.

Sit spiralis Archimæda AmM , ejus axis FAF , abscissa $AP = x$, ordinata PM ad angulum rectum $= y$, eique infinite proxima pm . Ducta mo parallela ad axem, erit, $mo = dx$, $oM = dy$. Sit propterea AM radius spiralis $= t$, cum quo Am faciat angulum infinitesimum MAm , & centro A , radio AM , descripto circuli arcu mr , erit $Mr = dt$. Voca arcum $mr = ds$, & eodem centro A , radio quovis constanti $= a$, describe circulum Fcb , & voca ejus arcum infinitesimum $cb = du$.

Ex hac præparatione erit primò $\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2$, seu $t^2 = x^2 + y^2$, & $t = \sqrt{x^2 + y^2}$; unde $dt = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Præterea habebis $\overline{Mr}^2 + \overline{rm}^2 = \overline{Mm}^2$ seu $dt^2 + ds^2 = dx^2 + dy^2$. Sed ex similitudine Sectorum Acb , Amr , est $Ac : cb :: Am : mr$; seu $a : dt :: t : ds$. & ex æquatione spiralis Archimedææ ad focum habes $cb = Mr$, seu $du = dt$; unde erit $ds = \frac{t dt}{a}$. Ergo factis opportune substitutionibus in altera superiori æquatione, obtinebis $dt^2 + \frac{t^2 dt^2}{a^2} = dx^2 + dy^2$, seu tandem

$$\overline{a^2 + x^2 + y^2} \times \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = a^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}. \text{ vel potius}$$

$$dy^3 + 2\overline{dx}d\overline{y} \times \frac{a^2xy + x^3y + xy^3}{x^2y^2 + y^4 - a^2x^2} + \overline{dx}^2 \times \frac{x^4 + x^2y^2 - a^2y^2}{x^2y^2 + y^4 - a^2x^2} = 0$$

unde completo quadrato, & facta radicis extractione, erit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\overline{xy} \times \overline{a^2 + x^2 + y^2} \pm a \times \overline{x^2 + y^2}^{\frac{3}{2}}}{x^2y^2 + y^4 - a^2x^2}.$$

Ecce itaque spiralis Archimedæ æquationem relatæ ad axem, ut optabamus, in qua y datur per x .
 * Quamquam vero in hujusmodi æquatione, indeterminatæ separari nullo artificio possint, vides tamen præfidiis pure mechanicis ad constructionem nos feliciter pervenisse, quod, attento illius summatoriæ adspectu, quam initio obtinuimus, cum curvam nostram ad axem referre placuit, impossibile videbatur.

Scio ego quidem constructionem hancce, quæ a sola circuli quadratura dependet, non penitus exhaurire supradictam Riccatianam formulam, quippe quæ construi etiam potest, quacumque alia proposita tractoria, cujus basis sit dicta spiralis Archimæda, ejusque tangens recta quævis linea constans; sed inter infinitas hæc constructiones nostra quidem maximum locum habet, ut quæ cæteris simplicior, nec minus vera.

Porro antequam finem facio, unum addam. Laudatus Mathematicus in capite secundo sui commentarii ostendit, quod ubi in constructione suæ formulæ tractoriam circuli adhibeat, tunc in infinitas occurrit transcendentes curvas, quæ simul exhaurire valent

* Ad hunc modum indeterminatæ separari possunt; substituat-
 tur pro $x = \frac{z}{a} \times \int \frac{a dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$, & pro $y = \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a} \times \int \frac{a dz}{\sqrt{a^2 - z^2}}$,
 & sit. E. W.

propositam

propositam formulam. Sed (quod ei merito quidem in pretio est) in infinita harum curvarum familia unam insuper latentem detegit algebraicam quarti gradus, quæ commodè ejusdem formulæ constructionem suppeditat, rectèque perficit. Nos in re fortasse difficiliori non dissimile exemplum hic attulimus. Vidimus enim problema nostrum, quod per tractoriam spiralis Archimedææ generatim constructur, exposcere & ipsum ad sui constructionem curvas numero infinitas, sed quod molestius videtur, magisque operosum, hujusmodi esse hæc curvas, ut nisi hypermechanico labore possimus assequi. Veruntamen in infinito harum agmine facile & nobis fuit ostendere unam præterea curvam abscondi, quam illico assequaris dependenter a sola quadratura circuli, ideoque attenta rei difficultate, multo simpliciore modo, quàm initio sperare licuisset. Noverim certe curvam hanc nostram non plene exhaustire datam formulam, sed infici nequit, ejusdem exhibere nullo fere negotio rectissimam, maximeque simplicem constructionem, quod satis est, aliisque planiorem viam ostendere, qua facilius enodare possint hujusce generis quæstiones inextricabiles primo intuitu, nec vero labore vacuas. Hoc itaque inventum credidimus non contemnendum fore, præsertim cum aliæ methodi usque adeo notæ, quovis versatæ studio, minime quantum nobis constat, ad id commodum perducere valeant.

Romæ prid. Non. Aprilis,
1766.

Pius Fantonus,

Philosophus & Mathematicus Bononiensis.

